Θέματα επιχειρησιακών ερευνών 14-11-17

Περίπτωση δυναμικού προγραμματισμού

▶ Πρόβλημα πλανόδιου πωλητή → ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

- Ορίζω $N_j = \{2,3,\dots j-1, j+1, \dots N\}$
  - $\hat{N}_j(i)$ είναι το υποσύνολο που περιέχει i στοιχεία του N_j

Δεν βάζω το 1 γιατί ξεκινάω από εκεί και θέλω να πάω στις υπόλοιπες είναι N_j, άρα το j ∄ μέσα στο σύνολο.

Σχόλιο!

- $f_i(j, \hat{N}_j(i))$: το μήκος της ελάχιστης διαδρομής από τον κόμβο i στον j μέσα από ένα σύνολο από i ενδιάμεσους κόμβους $\hat{N}_j(i)$.
- $f_{i-1}(k, \hat{N}_j(i) - \{k\}) + a_{kj}$ → απόσταση από τον κόμβο k στον κόμβο j

Σχόλιο!

$j \neq i \qquad \forall k \in \hat{N}_j(i) \qquad i = 1, 2, \dots N-2$

Θέλω να προσθέσω i στοιχεία ξεκινώντας από το 1 για να φτάσω στον N

Σχόλιο!

$\hat{N}_j(i) \subset N(j)$

- οριακή συνθήκη $f_0(j, -) = a_{1j}$
- $\min\{f_{N-2}(j, N_j) + a_{j1}\} \qquad j = 2, \dots N$

Ξεκινάω από το 1 αλλά θέλω να επιστρέψω στο 1.

Παρατήρηση!

⊭ παράδειγμα ⊭

1

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	0	3	1	5	4
2	1	0	5	4	2
3	5	4	0	2	1
4	3	1	3	0	2
5	5	3	4	1	0

για $i = 0$

$f_0(2,-) = a_{12} = 3$

$f_0(3,-) = a_{13} = 1$

$f_0(4,-) = a_{14} = 5$

$f_0(5,-) = a_{15} = 4$

Για $\lambda = 1$

$f_1(2,\{3\}) = f_0(3,-) + a_{32} = 1 + 4 = 5 \quad (3)$ από ποιον κόμβο προσ

$f_1(2,\{4\}) = f_0(4,-) + a_{42} = 5 + 1 = 6 \quad (4)$

$f_1(2,\{5\}) = f_0(5,-) + a_{52} = 4 + 3 = 7 \quad (5)$

$f_1(3,\{2\}) = f_0(2,-) + a_{23} = 3 + 5 = 8 \quad (2)$

$f_1(3,\{4\}) = f_0(4,-) + a_{43} = 5 + 3 = 8 \quad (4)$

$f_1(3,\{5\}) = f_0(5,-) + a_{53} = 4 + 3 = 7 \quad (5)$

$f_1(4,\{2\}) = f_0(2,-) + a_{24} = 3 + 4 = 7 \quad (2)$

$f_1(4,\{3\}) = f_0(3,-) + a_{34} = 1 + 2 = 3 \quad (3)$

$f_1(4,\{5\}) = f_0(4,-) + a_{54} = 5 + 1 = 6 \quad (5)$

$f_1(5,\{2\}) = f_0(2,-) + a_{25} = 3 + 4 = 7 \quad (2)$

$f_1(5,\{3\}) = f_0(3,-) + a_{35} = 1 + 1 = 2 \quad \boxed{(3)}$

$f_1(5,\{4\}) = f_0(4,-) + a_{45} = 5 + 2 = 7 \quad (4)$

Για $\lambda = 2$

$f_2(2,\{3,4\}) = \min\{f_1(3,\{4\}) + a_{32}, f_1(4,\{3\}) + a_{42}\}$
$= \min\{8+4, 3+1\} = 4 \quad (4)$

$f_2(2,\{3,5\}) = \min\{f_1(3,\{5\}) + a_{32}, f_1(5,\{3\}) + a_{52}\}$
$= \min\{8+0, 2+2\} = 4 \quad (5)$

$f_2(2,\{4,5\}) = \min\{5+1, 8+2\} = 6 \quad (4)$

$f_2(3,\{2,4\}) = \min\{6+5, 7+3\} = 10 \quad (4)$

$f_2(3,\{2,5\}) = \min\{6+5, 6+4\} = 10 \quad (5)$

$f_2(3,\{4,5\}) = \min\{5+3, 8+4\} = 8 \quad (4)$

$f_2(4,\{2,3\}) = \min\{5+4, 8+2\} = 9 \quad (2)$

$f_2(4,\{2,5\}) = \min\{6+4, 6+1\} = 7 \quad (5)$

$f_2(4,\{3,5\}) = \min\{8+2, 2+1\} = 3 \quad (5)$

$f_2(5,\{2,3\}) = \min\{5+3, 9+1\} = 8 \quad (2)$

$f_2(5,\{2,4\}) = \min\{6+3, 7+3\} = 9 \quad (2)$

$f_2(5,\{3,4\}) = \min\{8+1, 3+3\} = 6 \quad (4)$

για $i=3$ | (πόσα ενδιάμεσα βάζω) |

$f_3(2,\{3,4,5\}) = \min\{f_2(3,\{4,5\}) + a_{32},\ f_2(4\{3,5\} + a_{42}),$
$f_2(5,\{3,4\}) + a_{52}\}$

$= \min\{3+4,\ 3+1,\ 6+2\} = 4$ (4) → από ποιον κόμβο ήρθε

$f_3(3,\{2,4,5\}) = \min\{6+5,\ 7+3,\ 9+4\} = 10$ (4)

$f_3(4,\{2,3,5\}) = \min\{4+4,\ 10+2,\ 8+1\} = 8$ (2)

$f_3(5,\{2,3,4\}) = \min\{4+3,\ 10+1,\ 9+3\} = 7$ (2)

$\min\{f_3(j,\{2,3,4,5\} - \{j\}) + a_{j1}\}$ $j = 2,\dots,5$

$= \min\{4+1,\ 10+5,\ 8+3,\ 7+5\} = 5$ (2)

Έχουμε φτάσει στο (1).
Το (1) μας ήρθε, έχοντας περάσει από το (2)

Βέλτιστη διαδρομή: $1 \to 3 \to 5 \to 4 \to 2 \to 1$ Σχόλια!

---

(2) Εταιρεία παραγωγής χρωμάτων

4 χρώματα (λευκό, κίτρινο, μαύρο, κόκκινο)
Η μηχανή πρέπει να καθαρίζεται ανάμεσα σε διαδοχικές παρτίδες.
Θα μοντελοποιήσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα με 2 τρόπους. Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του πλανόδιου πωλητή αλλά και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο εκχώρησης (ακεραιογραμμικό προγραμματισμό)

	1 Λευκό	2 κίτρινο	3 μαύρο	4 κόκκινο
Λευκό	∞	10	17	15
κίτρινο	20	∞	19	18
μαύρο	50	44	∞	22
κόκκινο	45	40	20	∞

Ορίζω x_{ij} $\begin{cases} 1, & \text{αν το χρώμα } j \text{ ακολουθεί το χρώμα } i \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$\min\{10x_{12} + 17x_{13} + \dots 20x_{43} + M(x_{11} + x_{22} + x_{33} + x_{44})\}$

Πρέπει $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1$

μηχανή = έμπορος
προϊόντα = πόλεις

1 σχόλιο!

Οι οριακές συνθήκες:

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1$
$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1$
$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1$
$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1$
$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1$
$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1$
$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1$

α' τρόπος (αλγόριθμος πλανόδιου πωλητή)

Για $i=0$

$f_0(2,-)=10$
$f_0(3,-)=17$
$f_0(4,-)=15$

Για $i=1$

$f_1(2,\{3\})=f_0(3,-)+a_{32}=17+44=71$
$f_1(2,\{4\})=f_0(4,-)+a_{42}=15+40=55$
$f_1(3,\{2\})=f_0(2,-)+a_{23}=10+19=29$
$f_1(3,\{4\})=f_0(4,-)+a_{43}=15+20=35$
$f_1(4,\{2\})=f_0(2,-)+a_{24}=10+18=28$
$f_1(4,\{3\})=f_0(3,-)+a_{34}=17+22=39$

Για $i=2$

$f_2(2,\{3,4\})=\min\{f_1(3,\{4\})+a_{32},\ f_1(4,\{3\})+a_{42}\}$
$=\min\{35+44,\ 39+40\}=79$

$f_2(3,\{2,4\})=\min\{f_1(2,\{4\})+a_{23},\ f_1(4,\{2\})+a_{43}\}$
$=\min\{53+19,\ 29+20\}=49$

$f_2(4,\{2,3\})=\min\{f_1(2,\{3\})+a_{24},\ f_1(3,\{2\})+a_{34}\}$
$=\min\{71+18,\ 29+21\}=51$

η επιλογή της αφετηρίας είναι τυχαία αλλά το αποτέλεσμα θα είναι ίδιο, όποια αφετηρία και θα διαλέξω.

Σχόλιο!

$$\min\{f_2(j,\{2,3,4\}-\{j\})+a_{j1}\} =$$
$$=\min\{f_2(2,\{3,4\})+a_{21},\ f_2(3,\{2,4\})+a_{31},\ f_2(4,\{2,3\})+a_{41}\}$$
$$=\min\{79+20,\ 49+50,\ 51+45\}= 96$$

Βέλτιστη λύση 96

αλληλουχία: $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$

□

β' τρόπος

ο αλγόριθμος εκχώρησης: βελτιστοποίηση είναι να καταφέρω να μεγιστοποιήσω το πρόβλημα. Είναι λες και έχω κάποια άτομα και θέλω να τα βάλω στην δουλειά.

Σχόλιο!

$$\begin{pmatrix} -80 & -10 & -17 & -15 \\ -20 & -80 & -19 & -18 \\ -30 & -44 & -80 & -22 \\ -45 & -40 & -20 & -80 \end{pmatrix}$$

έβαλα στην θέση του ∞ ένα νούμερο, όποιο θέλω, αρκεί να είναι μεγάλο

Σχόλιο!

Επιλέγω το μεγαλύτερο από κάθε γραμμή και το αφαιρούμε από την γραμμή.

Σχόλιο!

$\downarrow$

$$\begin{pmatrix} -70 & 0 & -7 & -5 \\ -2 & -62 & -1 & 0 \\ -28 & -22 & -58 & 0 \\ -25 & -20 & 0 & -60 \end{pmatrix}$$

Επιλέγω το μεγαλύτερο από κάθε στήλη και το αφαιρώ από την στήλη

Σχόλιο!

$$\begin{pmatrix} -68 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & -62 & -1 & 0 \\ -26 & -22 & -58 & 0 \\ -24 & -20 & 0 & -60 \end{pmatrix}$$ ⇝ Πίνακας 4x4

κάτω εκχώρηση μηδενικών

Λύση

$x_{12} = 1$
$x_{21} = 1$

$x_{34} = 1$
$x_{43} = 1$

Κάνει 2 κύκλους $1 \to 2$, $2 \to 1$

$3 \to 4$, $4 \to 3$

Λύση 72

Το 72 είναι ένα κάτω φράγμα για τον υπολογισμό

°° Σχόλιο

Πρέπει να διώξω τις λύσεις $x_{34} = 1$, $x_{43} = 1$
Πρέπει να αλλάξω τον αντικειμενικό συντελεστή. Δηλαδή, αντί για -80 μπορώ να βάλω -100.

°° Σχόλιο !

° Σχόλιο SOS

Άσκηση

$ΟΣΑRA

ΘΕΜΑ ΣΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ♥

Φορτηγό αναχωρεί από τον σταθμό 1 για να ξεφορτώσει σε τρεις άλλους σταθμούς στους 2, 3, 4. Το κόστος μετάβασης από τον σταθμό $i \to j$ εξαρτάται από το πλήθος n των σταθμών των προηγούμενων των $1, j$ εκτός από τον 1.

i \ j	2 (n=0)	3 (n=0)	4 (n=0)	2 (n=1)	3 (n=1)	4 (n=1)
1	30	34	42	–	–	–
2	–	33	46	–	34	40
3	40	–	52	35	–	41
4	48	43	–	44	37	–

Δεν απαιτεί να γυρίσει πίσω απλά θέλει να ξεφορτώσει στους άλλους 3, αλλά [illegible] τροποποίηση στο τελευταίο βήμα.

°° Σχόλιο ▼

Ζητάμε να βρούμε την διαδρομή μέγιστου κόστους

Λύση

για i=0

$f_0(2,-)=a_{12}=30$
$f_0(3,-)=a_{13}=34$
$f_0(4,-)=a_{14}=42$

για i=1

$f_1(2,\{3\})=f_0(3,-)+a_{32}=34+40=74$
$f_1(2,\{4\})=f_0(4,-)+a_{42}=42+48=90$
$f_1(3,\{2\})=f_0(2,-)+a_{23}=30+33=63$
$f_1(3,\{4\})=f_0(4,-)+a_{43}=42+43=85$
$f_1(4,\{2\})=f_0(2,-)+a_{24}=30+46=76$
$f_1(4,\{3\})=f_0(3,-)+a_{34}=34+52=86$

για i=2

$f_2(2,\{3,4\})=\min\{f_1(3,\{4\})+a_{32},\ f_1(4,\{3\})+a_{42}\}$
$=\min\{85+35,\ 86+44\}=120$

$f_2(3,\{2,4\})=\min\{f_1(2,\{4\})+a_{23},\ f_1(4,\{2\})+a_{43}\}$
$=\min\{90+34,\ 76+37\}=113$

$f_2(4,\{3,2\})=\min\{f_1(3,\{2\})+a_{34},\ f_1(2,\{3\})+a_{24}\}$
$=\min\{74+40,\ \underline{63+41}\}=104$

Λύση $1\to2\to3\to4$

Δεν επιστρέφει πίσω

Αν ήθελα να γυρίσω πίσω θα έπρεπε
$2\to1$
$3\to1$
$4\to1$

Ο Σχόλιο

Ο αλγόριθμος του πλανώδιου πωλητή

για οποιονδήποτε φορτηγό είναι σαν τον πωλητή, είναι ένα πραγματικό πρόβλημα από μόνο του, όπως οι εργασίες που κάνουμε σε μια μηχανή. το ίδιο πρόβλημα είναι και στις πλάκες, που έχουν οπές πάνω και το τρυπάνι, πρέπει να μετακινηθεί σωστό έτσι ώστε να βρεθεί στις οπές και να κάνει τρύπες σε ελάχιστο χρόνο.
Επίσης, ως μέτρο ομοιότητας, μπορώ να ελέγξω στις πρωτεΐνες ποιες είναι ίδιες.
Έχει χρησιμοποιηθεί και στο DNA.
Επίσης και στην ορθογραφία του ηλεκτρονικού υπολογιστή.
Έχουμε 2 λέξεις και βγάζει τις πιο κοντινές.
Και στην ζωγραφική, χωρίς να σηκώσω το μολύβι.

Από μεριά μοντελοποίησης

Σημαίνει ο σημερινός αλγόριθμος ≡ εκχώρηση ότι σε κάθε πόλη μπαίνει 1 φορά και πρέπει να βγει 1 φορά. Δεν είναι βέλτιστη λύση αν κάνει κύκλους, συνεπώς στην αντικειμενική συνάρτηση βάζω μεγάλο κόστος για να σταματήσει να κάνει κύκλους, αλλιώς δεν ξέρω πόσες φορές το κάνω.

Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE @ DIRECT•
ELSEVIER
Operations Research Letters 32 (2004) 302–303
Operations Research Letters
www.elsevier.com/locate/dsw

Continuous line drawings via the traveling salesman problem

Robert Bosch*, Adrianne Herman

Department of Mathematics, Oberlin College, Oberlin, OH 44074, USA

Received 9 September 2003; received in revised form 19 September 2003; accepted 3 October 2003

Abstract

We describe how to use the traveling salesman problem to create continuous line drawings of target pictures.

Keywords: Traveling salesman problem; Continuous line drawings; Art

1. Introduction

If you ever took a drawing class, even as a child, chances are good that at some point you made a *continuous line drawing.* (Art teachers are fond of them.) When you did this, you looked at the object you were asked to draw, you placed the tip of your drawing implement on your paper, and you made a line drawing of the object, taking great care to keep the tip of your drawing implement in contact with your paper until you were finished.

When you were making your continuous line drawing, you were solving an optimization problem. Your objective was to produce the best possible line drawing of the object. What made this difficult was the constraint: you were not allowed to remove your drawing implement from the paper until your drawing was complete.

In this brief note we describe how to construct traveling salesman problem (TSP) instances that when solved yield continuous line drawings of target pictures.

2. The procedure

To create a continuous line drawing of a target picture, we do the following:

Step 1 (*Format the target picture*): Resize the target picture so that it is $km \times kn$ (i.e., so that it has km rows and kn columns of pixels). Then convert it into PGM (portable graymap) format. In PGM format, each pixel has a grayscale value between 0 (completely black) and 255 (completely white).

Step 2 (*Divide the target picture into squares*): Partition the pixels of the target picture into m rows and n columns of $k \times k$ squares. For each row i and column j, compute the mean grayscale value μ_{ij} of the pixels in square (i,j). Then set $g_{ij} = \gamma - \lfloor \gamma\mu_{ij}/256 \rfloor$. Note that g_{ij} is the average darkness of square (i,j) on a 0 (completely white) to γ (completely black) gray scale. For γ, we use an integer between 4 and 9, inclusive.

* Corresponding author.

E-mail addresses: bobb@cs.oberlin.edu (R. Bosch), aherman@cs.oberlin.edu (A. Herman).

0167-6377/$ - see front matter
doi:10.1016/j.orl.2003.10.001

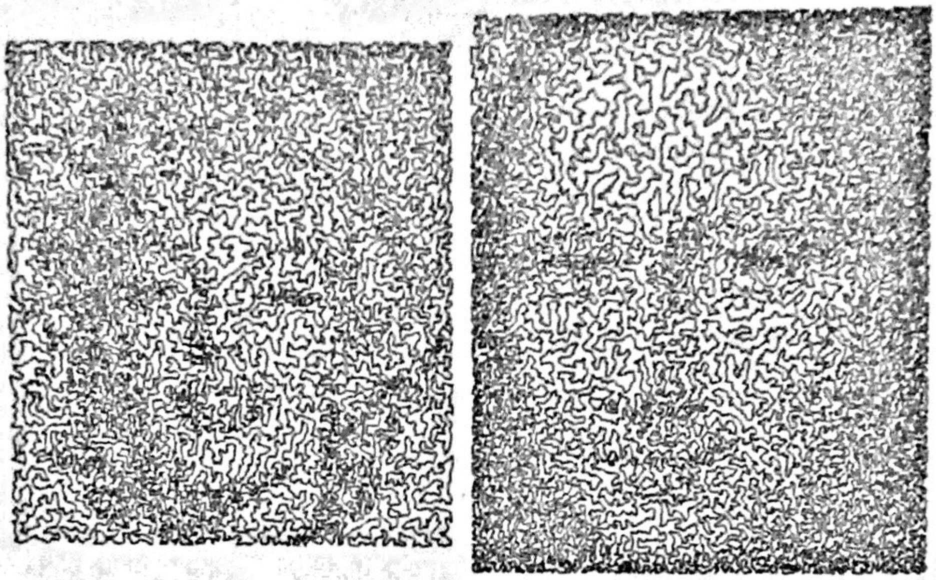

Fig. 1. Marilyn Monroe (20332 cities) and the Mona Lisa (27486 cities).

Step 3 (*Construct and solve the TSP instance*): Divide the canvas into m rows and n columns of squares. For each row i and column j, randomly place g_{ij} cities (points) in square (i, j). Do this in such a way that the cities in square (i, j) are uniformly distributed in square (i, j). After computing the intercity distances, solve the TSP instance and plot the tour.

Fig. 1 displays two continuous line drawings produced via this TSP-based procedure. One of our target pictures was a 231×210 picture of Marilyn Monroe; the other was a 240×198 picture of a portion of the Mona Lisa. For both pictures, we used $k = 3$ and $\gamma = 9$. We used John Bradley's XV package [2] to resize and format the target pictures and the chained Lin-Kernighan heuristic in Applegate, Bixby, Chvatal, and Cook's Concorde [1] package to "solve" the TSP instances.

References

[1] D. Applegate, R. Bixby, V. Chátal, W. Cook, Concorde—a code for solving Traveling Salesman Problems, `http://www.princeton.edu/tsp/concorde.html`.

[2] J. Bradley, The On-Line Version of the XV 3.10a Manual, `http://www.icgeb.trieste.it/~netsrv/xvman/index.html`.